Résolution des équations du second degré

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Résolution des équations du second degré

Exemple

Si nous ajoutons 10 au triple d'un nombre, on trouve son carré.
Quel est ce nombre ***(Quels sont ces nombres)*?**

❶ Choix d'une inconnue : soit **x** le(s) nombre(s) à trouver

❷ Mise en équation: $$10 + 3x = x^2$$

Nous résoudrons cette équation au cours de la leçon

Les équations du second degré

Une équation du second degré à une inconnue peut se présenter sous différentes formes :

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2 = x + 4$$

$$(x - 2)(x + 4) = 2$$

$$2x + 1 = \frac{1}{x}$$

Etc….

Pour les résoudre on doit les mettre sous la forme :

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Et identifier les coefficients a ; b ; c

Exemple :

$$10 + 3x = x^2$$

On doit se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

réponse

$$-1\,x^2 + 3x + 10 = 0$$

Les coefficients sont :

a =

b =

c =

Exercices

Exemple :

$$10 + 3x = x^2$$

On doit se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

Les coefficients sont :

a = -1

b = 3

c = 10

Méthode de résolution

Pour résoudre une équation de la forme ax²+bx+c=0 on doit calculer le discriminant Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ex: $-1x^2 + 3x + 10 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 10$$

$$\Delta = 49$$

Suivant le valeur du discriminant Δ 3 cas sont envisageables

- **$\Delta>0$** Il y a deux solutions x_1 et x_2

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ex: **$- x^2 + 3x + 10 = 0$** $\quad \Delta = 49$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{49}}{2x(-1)} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{49}}{2x(-1)}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -2$$

Ce sont les solutions du problème initial

- **$\Delta=0$** Il y a une solution x_1

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- **$\Delta<0$** Il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$

Pratique

Trouve le discriminant et identifie la nature des racines.

4. $2x^2 + 4x - 4 = 0$

Réponse $\Delta = 48$ **; 2 solutions réelles**

5. $3x^2 + 12x + 12 = 0$

Réponse $\Delta = 0$ **; Une solution réelle**

6. $8x^2 = 9x - 11$

Réponse $\Delta = -271$ **;** Il n'y a aucune solution

exemples

Mettre sous la forme $ax^2+bx+c=0$
Déterminer les coef a ; b ; c

$5x^2+16x= -3$

$5x^2+16x+3=0$ a=5 b=16 c=3

Δ

$\Delta=16^2- 4\times5\times3$

$\Delta=196$

x

$$x_1 = \frac{-16-\sqrt{196}}{2\times5} \qquad x_2 = \frac{-16+\sqrt{196}}{2\times5}$$

$\boxed{x_1 = -3}$ $\boxed{x_2 = -0,2}$

$2x^2-6x-16 = -2x^2-6x$

$4x^2-16=0$ a=4 b=0 c= -16

Δ

$\Delta=0^2- 4\times4\times(-16)$

$\Delta=256$

x

$$x_1 = \frac{-\sqrt{256}}{2\times4} \qquad x_1 = \frac{\sqrt{256}}{2\times4}$$

$\boxed{x_1 = -2}$ $\boxed{x_2 = 2}$

Remarque:

Avec les identités remarquables :

$4x^2-16=0$

$(2x+4)(2x-4)=0$

$(2x+4)=0$ ou $(2x-4)=0$

$x= -2$ ou $x=2$

$\frac{3x^2+3}{5} = x$

$3x^2-5x+3=0$ a=3 b=-5 c=3

Δ

$\Delta= -11$

x

Il n’y a aucune solution

Problème

Pour quelle valeur de x , l'aire de ce rectangle est-elle égale à 684 cm² ?

(4x – 2)

(4x + 18)

1) Trouvons l'expression algébrique représentant l'aire du rectangle.

Aire = Longueur X largeur

Aire = $(4x + 18)\quad(4x - 2)$

Aire = $4x(4x - 2) + 18(4x - 2)$

Aire = $16x^2 - 8x + 72x - 36$

Aire = $16x^2 + 64x - 36$

$(4x - 2)$

$(4x + 18)$

2) Déterminons l'équation:

$$\text{Aire} = 16x^2 + 64x - 36$$

$$684 = 16x^2 + 64x - 36$$

3) Ramenons l'équation à 0:

$$684 = 16x^2 + 64x - 36$$

$$-684 \qquad\qquad -684$$

$$0 = 16x^2 + 64x - 720$$

4) Déterminons les zéros de cette équation: $0 = 16x^2 + 64x - 720$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 16 \quad b = 64 \quad c = -720$

$$\frac{-64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \times 16 \times -720}}{2 \times 16}$$

$$\frac{-64 \pm \sqrt{4096 + 46080}}{32}$$

$$\frac{-64 \pm \sqrt{50176}}{32}$$

$$\frac{-64 \pm 224}{32}$$

$$x_1 = \frac{-64 - 224}{32} = \frac{-288}{32} = -9$$

$$x_2 = \frac{-64 + 224}{32} = \frac{160}{32} = 5$$

$x_1 = -9 \leftarrow$ **Cette valeur est à rejeter car elle est négative. Un rectangle ne peut avoir une dimension négative.**

$x_2 = 5$

Remarque :

Les valeurs de x auraient pu être déterminées par factorisation et par la loi du produit nul.

$$0 = 16x^2 + 64x - 720$$

$$0 = 16 (x^2 + 4x - 45)$$

$$0 = 16 (x + 9) (x - 5)$$

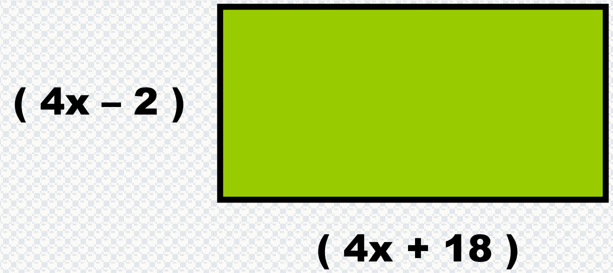
$$0 = (x + 9) (x - 5)$$

si $x + 9 = 0$ **alors** $x = -9 \longleftarrow$ **à rejeter**

si $x - 5 = 0$ **alors** $x = 5$

Réponse: 5 cm

Vérification avec l'équation de départ.



Aire $= 16x^2 + 64x - 36$

$684 = 16 \times 5^2 + 64 \times 5 - 36$

$684 = 16 \times 25 + 64 \times 5 - 36$

$684 = 400 + 320 - 36$

$684 = 684$

ou

Aire $= (4x + 18) \quad (4x - 2)$

$684 = (4 \times 5 + 18) \quad (4 \times 5 - 2)$

$684 = 38 \times 18$

$684 = 684$

Réponse: 5 cm

THÉORÈME de La somme et le produit des racines

Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, la somme des solutions est $-\frac{b}{a}$

$(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a})$

et le produit des solutions est $\frac{c}{a}$.

$(x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a})$

Et puis? **Et bien, si on connaît les solutions on peut travailler à rebours pour trouver l'équation quadratique!**

Exemple - Trouve l'équation qui a les solutions suivantes.

$$x_1 = -\frac{1}{4} \; et \; x_2 = -\frac{1}{2}$$

ÉTAPE 1- Trouve la somme des solutions.

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \qquad -\frac{3}{4}$$

ÉTAPE 2- Calcule le produit des racines.

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{8}$$

ÉTAPE 3- Substitue la somme et le produit des racines dans l'équation quadratique:

$$x^2 - \text{(somme des racines)}x + \text{(produit des racines)}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{8}$$

$$x^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 8x^2 + 6x + 1$$

$$8x^2 + 6x + 1$$

Exercice :

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2-4x-5=0$

2) $x^2+16x+23=0$

3) $x^2-11x+28=0$

4) $x^2+x-1=0$

5) $-5x^2+2\sqrt{5}x-1=0$

6) $-4x^2-x-6=0$

7) $-6x^2+23x+4=0$

8) $3x^2-2\sqrt{6}x+3=0$

9) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{3}x-\frac{7}{6}=0$

1) $S=\{-1;5\}$

2) $S=\left\{-8-\sqrt{41};-8+\sqrt{41}\right\}$

3) $S=\{4;7\}$

4) $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5) $S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

6) $S=\varnothing$

7) $S=\left\{-\frac{1}{6};4\right\}$

8) $S=\varnothing$

9) $S=\left\{-7;-\frac{1}{3}\right\}$


FIN